Να προσεγγίσει η $\sqrt{2}$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

$\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$

$x_{n+1} = 0.5\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $n=0,1,2,\dots$, $x_0>0$.

$x_0 = 2$

$x_1 = 0.5\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 1.5$

$x_2 = 0.5\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.416666667$ (2dg) $(0.00x)^2 \rightarrow 0.0000x$

$x_3 = 1.41421568627 4$. (5dg)

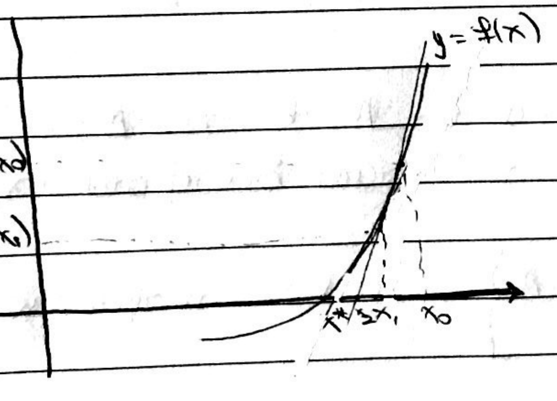
$x_4 = 1.41421356237 4$ (11dg)

Μέθοδος της Τέμνουσας:

Προσεγγίζει την $f'(x_n)$ με τη διαιρεμένη διαφορά $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Τέμνουσας είναι:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \quad n=1,2,\dots, \quad x_0, x_1 \in I, \quad x_0 \neq x_1.$$




Θεώρημα Τοπικής Σύγκλισης μεθόδου Τέμνουσας:

Έστω $x^*$ μια ρίζα της $f$ και διάστημα $(a,b)$ όπου $x^* \in (a,b)$, $f \in C^2(a,b)$ και $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Τότε υπάρχει διάστημα $I$ που περιέχει το $x^*$ ώστε η μέθοδος της τέμνουσας να είναι καλά ορισμένη στο $I$ και να συγκλίνει στο $x^*$, για αρχικές προσεγγίσεις $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$. Επιπλέον, η σύγκλιση είναι τάξης $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$.

+ Να προσεγγιστεί η $\sqrt{2}$ με τη μέθοδο Τέμνουσας, με $x_0 = 2$ και $x_1 = 1.5$.

$f(x) = x^2 - 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{\frac{x_n^2 - 2 - (x_{n-1}^2 - 2)}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{x_n + x_{n-1}} =$$

$$= \frac{x_n^2 + x_n x_{n-1} - x_n^2 + 2}{x_n + x_{n-1}} = \frac{x_n x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}}.$$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 1.4285$ (1dg)

$x_3 = 1.4146$ (3dg)

$x_4 = 1.41421569$ (5dg)

$x_5 = 1.41421356262689$ (9dg)

$x_6 = 1.4142135623173095$ (15d.g)

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = c \Rightarrow x_{n+1} - x^* = c(x_n - x^*)^p \approx c(10^{-k})^p = c(10^{-kp}).$$

Γραμμικά Συστήματα

Ένα γραμμ. σύστημα γράφεται ως $Ax = b$ όπου $A$ $n \times n$ πραγματικός πίνακας ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$), $x$ κ' $b$ n-διάστατα διανύσματα ($x, b \in \mathbb{R}^n$).

$x = A^{-1} b$

Αν $U = A^{-1}$ τότε $AU = I \Leftrightarrow Au^i = e^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ πρέπει να λύσουμε n γραμμικά συστήματα.

## Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Βασίζεται στην ιδέα να μετατρέψουμε το γρ. σύστημα σε ισοδύναμο άνω τριγωνικό γρ. σύστημα με μια διαδικασία διαδοχικών απαλοιφών των στοιχείων του κάτω τριγ. μέρους του A.

- Έστω $Ux = y$ το ισοδύναμο γραμμικό άνω τριγ. σύστημα.

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = y_1$$
$$u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = y_2$$
$$\ddots$$
$$u_{nn}x_n = y_n.$$

Λύνεται με προς τα πίσω αντικαταστάσεις

$x_n = y_n / u_{nn}$

Για $i = n-1, n-2, \dots, 1$.

$$x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right) / u_{ii}$$

Κόστος των προς τα πίσω αντικαταστάσεων είναι: $n$ διαιρέσεις

$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ πολ/μοί - προσθέσεις